فصل هفتم
رابطه ها: برخورد دوم

سید ناصر رضوی

e-mail: razavi@comp.iust.ac.ir

۱۳۸۵

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۱. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۷-۱. اگر A و B مجموعه باشند، یک **رابطه** از A به B زیرمجموعه ای است از A*B. زیرمجموعه های A*A را روابط بر A می نامیم.

مثال ۷-۱. (آ) رابطه R بر مجموعه Z را با aRb یا R (a, b) اگر $a \le b$ تعریف می کنیم(این رابطه را بر Q یا R نیز می توان تعریف نمود- ولی بر C نه).

(ب) فرض کنیم n متعلق به مجموعه اعداد صحیح مثبت(Z^+) باشد. به ازاء اعداد صحیح x و y ، رابطه R به پیمانه n با xRy اگر x-y مضربی از n باشد تعریف می شود. مثلا بازاء n=7 داریم:

$9R2,\ -3R11,\ 4R0,\ 3\not R 7$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۱. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۷-۲. رابطه R بر مجموعه A **انعکاسی** است اگر بازاء هر عضو از A مانند x، (x, x) در R باشد.

مثال ۷-۴. برای A={1, 2, 3, 4} رابطه R بر A انعکاسی است اگر و فقط اگر :

$R \supseteq \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}.$

بنابراین $R_1=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ بر A انعکاسی نیست ولی R_2 بر A انعکاسی می باشد.

$R_2 = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \le y\}$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۱. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

مثال ۷-۵. اگر A یک مجموعه متناهی با |A|=n باشد، $|A*A|=n^2$ و درنتیجه 2^{n^2} رابطه بر A وجود دارد. چند تا از این روابط انعکاسی می باشند؟

اگر $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ، برای آنکه رابطه R بر A انعکاسی باشد باید تمام (a_i, a_i) را که در آن $1 \le i \le n$ در R قراردهیم. بقیه n^2-n زوج مرتب می توانند در R باشند و یا نباشند، در نتیجه تعداد روابط منعکس بر A با n عنصر برابر است با:

$$2^{n^2-n}$$

رابطه ها: برخورد دوم

۱-۷. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۷-۳. رابطه R بر مجموعه A را **متقارن** نامیم اگر بازاء هر x و y متعلق به A:

$$(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R,\ \text{ for all } x,y\in A$$

مثال ۷-۶. بازاء $A=\{1, 2, 3\}$ داریم:

(آ) $R_1=\{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$، متقارن است ولی انعکاسی نیست.

(ب) $R_2=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3)\}$، انعکاسی است ولی متقارن نیست.

(پ) $R_3=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ و $R_4=\{=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2,3), (3, 2)\}$ هر دو بر A هم انعکاسی و هم متقارن می باشند.

(ت) $R_5=\{(1,1), (2, 3), (3, 3)\}$ ، نه انعکاسی و نه متقارن است.

رابطه ها: برخورد دوم

۱-۷. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

برای شمارش روابط متقارن بر $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، $A*A$ را به صورت $A_1\cup A_2$ می نویسیم که در آن

$A_1=\{(a_i, a_i)|1\le i \le n\}$, $A_2=\{(a_i, a_j)|\ 1 \le i, j \le n, i\ne j\}$

$|A_2|=|A*A|-|A_1|=n^2-n=n(n-1)$

مجموعه A_2 شامل $(1/2)(n^2-n)$ زیر مجموعه S_{ij} به شکل $\{(a_i,a_j),(a_j,a_i)\}$ است که در آن $1 \le i<j \le n$.

بنابراین، تعداد روابط متقارن بر A: $2^n.2^{(1/2)(n^2-n)}=2^{(1/2)(n^2+n)}$

و هم چنین تعداد روابط انعکاسی و متقارن بر A: $2^{(1/2)(n^2-n)}$

رابطه ها: برخورد دوم

۱-۷. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۷-۴. به ازاء مجموعه A، رابطه R بر A را **متعدی** می نامیم اگر به ازاء هر سه عضو از A مانند x, y, z داشته باشیم:

$$(x,y)\in R,(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R, \quad \text{for all } x,y,z\in A$$

مثال ۷-۸ رابطه R بر Z^+ که به صورت aRb اگر a|b ، انعکاسی و متعدی می باشد اما متقارن نیست.(۲ با ۶ رابطه دارد ولی ۶ با ۲ خیر)

مثال ۷-۹. رابطه R را بر مجموعه Z به صورت aRb اگر $ab\ge 0$، تعریف می کنیم. بنابراین، R انعکاسی و متقارن است ولی متعدی نمی باشد.(3R0و 0R-7 اما 3 با 7- رابطه ندارد.)

نکته: فرمول کلی برای تعداد کل روابط متعدی بر یک مجموعه متناهی وجود ندارد.

رابطه ها: برخورد دوم

۱-۷. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۷-۵. فرض کنیم R یک رابطه بر A باشد. R **پادمتقارن** است اگر بازاء هر دوعضو از A مانند a, b:

$$(a,b)\in R,(b,a)\in R \Rightarrow a=b, \quad \text{for all } a,b\in A$$

مثال ۷-۱۱. رابطه زیر مجموعه بودن: ARB، اگر A زیر مجموعه B باشد، انعکاسی، پاد متقارن و متعدی می باشد ولی متقارن نیست.

مثال ۷-۱۲. اگر $A=\{1, 2, 3\}$ و $R=\{(1,2), (2, 1), (2, 3)\}$ آنگاه R نه متقارن است و نه پاد متقارن، ولی $R_1=\{(1, 1), (2, 2)\}$ هم متقارن می باشد و هم پاد متقارن.(تعداد این نوع روابط چیست؟)

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۱. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

برای شمارش روابط پادمتقارن بر $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ، $A*A$ را به صورت $A_1 \cup A_2$ می نویسیم که در آن

$A_1=\{(a_i, a_i) \mid 1 \le i \le n\}$, $A_2=\{(a_i, a_j) \mid 1 \le i, j \le n, i \ne j\}$

$|A_2|=|A*A|-|A_1|=n^2-n=n(n-1)$

مجموعه A_2 شامل $(1/2)(n^2-n)$ زیر مجموعه S_{ij} به شکل $\{(a_i,a_j),(a_j,a_i)\}$ است که در آن $1 \le i<j \le n$. سه انتخاب برای این نوع از زیر مجموعه ها داریم: انتخاب یکی از دوتا و یا هیچ کدام؛ بنابراین:

بنابراین، تعداد روابط پاد متقارن بر A: $2^n.3^{(1/2)(n^2-n)}$

و هم چنین تعداد روابط انعکاسی و پادمتقارن بر A: $3^{(1/2)(n^2-n)}$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۱. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۷-۶. گوییم رابطه R بر مجموعه A یک رابطه **ترتیب جزئی** است اگر R انعکاسی، پادمتقارن و متعدی باشد.(اگر برای هر a, b متعلق به A، aRb و یا bRa در این صورت R را یک رابطه **ترتیب تام** گوییم.). مانند روابط $\le, \ge, \subseteq, \supseteq, \ldots$

مثال ۷-۱۵. رابطه عاد کردن بر Z^+ رابطه ترتیب جزئی می باشد.

تعریف ۷-۷. **رابطه هم ارزی** R بر A رابطه ای است انعکاسی، متقارن و متعدی.

مثال: رابطه aRb اگر a mod n=b mod n (هم نهشتی به پیمانه n)

نکته : رابطه **تساوی** هم یک رابطه ترتیب جزئی و هم یک رابطه هم ارزی می باشد.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

تعریف ۷-۸. اگر A، B و C مجموعه بوده و R_1 رابطه ای از A به B و R_2 رابطه ای از B به C باشد، آنگاه رابطه ترکیب R_1oR_2 رابطه ایست از A به C که به صورت زیر تعریف می شود:

$$R_1oR_2=\{(x,z) \mid (x,y) \in R_1, (y,z) \in R_2\}$$

(توجه: ترکیب دو رابطه در جهت عکس ترکیب توابع نوشته می شود)

مثال ۷-۱۷. فرض کنیم:

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{w, x, y, z\}$, $C=\{5, 6, 7\}$

رابطه R_1 از A به B و رابطه R_2 از B به C را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$R_1=\{(1, x), (2, x), (3, y), (3, z)\}$, $R_2=\{(w, 5), (x, 6)\}$, $R_3=\{(w, 5), (w, 6)\}$

در این صورت :

$R_1oR_2=\{(1, 6), (2, 6)\}$, $R_1oR_3=\emptyset$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

قضیه ۷-۱. فرض کنیم A, B, C و D مجموعه بوده و R_1 رابطه ای از A به B، R_2 رابطه ای از B به C و R_3 رابطه ای از C به D باشد. در این صورت:

$$R_1o(R_2oR_3)=(R_1oR_2)oR_3=R_1oR_2oR_3$$

تعریف ۷-۹. بازاء مجموعه A و رابطه R بر A ، توانهای R را به طور بازگشتی تعریف می کنیم:

(آ) $R^1=R$؛

(ب) $R^{n+1}=RoR^n$ (بازاء n متعلق به Z^+)

مثال ۷-۱۹. اگر $A=\{1, 2, 3, 4\}$ و $R=\{(1, 2),(1, 3),(2, 4),(3, 2)\}$ ، آنگاه

$R^2=\{(1, 4),(1, 2), (3, 4)\}$, $R^3=\{(1, 4)\}$, $R^n=\emptyset$ for $n \ge 4$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

تعریف ۷-۱۰. **ماتریس صفر – یک** (با استفاده از عملیات بولین ۱ = ۱ + ۱)

مثال ۷-۲۰.ماتریس E یک ماتریس ۴*۳(صفر-یک)می باشد.

$e_{11}=1$ و $e_{23}=0$ و$e_{31}=1$

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

مثال ۷-۲۱. فرض کنیم:

$A=\{1, 2, 3, 4\}, B=\{w, x, y, z\}, C=\{5, 6, 7\}$

رابطه R_1 از A به B و رابطه R_2 از B به C را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$R_1=\{(1, x), (2, x), (3, y), (3, z)\}$, $R_2=\{(w, 5), (x, 6)\}$,

در این صورت :

ما تریس رابطه

$$M(R_1)=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}w&x&y&z\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}, \quad M(R_2)=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}5&6&7\end{matrix}\\ \begin{matrix}w\\x\\y\\z\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

$$M(R_1)\cdot M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=M(R_1\circ R_2)$$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

فرض کنیم A مجموعه ای با $|A|=n$ و R رابطه ای بر A باشد.اگر M(R) ماتریس رابطه R باشد، در این صورت:

(آ) $M(R)=\mathbf{0}$(ماتریس با تمام درایه های صفر)، اگر و فقط اگر $R=\varnothing$؛

(ب) $M(R)=\mathbf{1}$(ماتریس با تمام درایه های یک)، اگر و فقط اگر $R=A*A$ ؛

(پ) به ازائ هر n متعلق به Z^+، $M(R^n)=[M(R)]^n$.

تعریف ۷-۱۱. **تعریف حق تقدم** $(E\leq F)$: می گوییم E پیش از F است هرگاه تمام درایه های E کوچکتر یا مساوی درایه های متناظر شان در F باشند.

مثال ۷-۲۳.

$$E=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

تعریف ۷-۱۲. ماتریس واحد:برای هر n متعلق به Z^+ و $I_n=(\delta_{ij})_{n*n}$ ، I_n ماتریس n*n (صفر-یک) است که:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{if } i=j\\ 0, & \text{if } i\neq j\end{cases}$$

تعریف ۷-۱۳. **ترانهاده**: فرض کنیم $A=(a_{ij})_{m*n}$ یک ماتریس ۰-۱ باشد. ترانهاده A که به صورت A^{tr} نوشته می شود، ماتریس$(a^*_{ij})_{n*m}$است که در آن بازاء هر $1\leq i\leq m$ و $1\leq j\leq n$ داشته باشیم:$a^*_{ij}=a_{ij}$.

مثال ۷-۲۴.

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\1&1\end{bmatrix}, A^{tr}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

قضیه ۷-۲. فرض کنیم A مجموعه ای با $|A|=n$ و R رابطه ای بر A باشد.اگر M(R) ماتریس رابطه R باشد، در این صورت

(آ) R انعکاسی است اگر و فقط اگر $I_n \le M$.

(ب) R متقارن است اگر و فقط اگر $M=M^{tr}$.

(پ) R متعدی است اگر و فقط اگر $M.M=M^2\le M$.

(ت) R پاد متقارن است اگر و فقط اگر $M\cap M^{tr}\le I_n$. (اشتراک با min تعریف می شود $0\cap0=0\cap1=1\cap0=0,\ 1\cap1=1$)

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

اثبات (پ) از قضیه ۷-۲. فرض کنیم $M^2\le M$. اگر $(x,y),(y,z)\in R$

$$\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1_{xy} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1_{yz} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1_{xz} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}\le M$$

بنابراین $(x,z)\in R$. برعکس اگر R متعدی بوده و M ماتریس رابطه ای باشد، s_{xz} را در سطر (x) و ستون (z) از M^2 با $s_{xz}=1$ در نظر می گیریم. بازاء s_{xz} مساوی ۱ در M^2 باید حداقل یک $y\in A$ باشد که در M، $m_{xy}=m_{yz}=1$. این فقط وقتی رخ می دهد که xRy و yRz. پس از متعدی بودن R نتیجه می شود که xRz. بنابراین $M^2\le M$.

رابطه ها: برخورد دوم

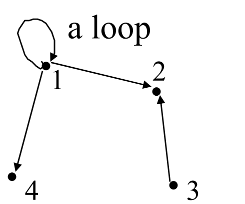
۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

تعریف ۷-۱۴. گرافهای جهت دار $G=(V, E)$

مثال ۷-۲۵.

$V=\{1,2,3,4,5\}$

$E=\{(1,1),(1,2),(1,4),(3,2)\}$

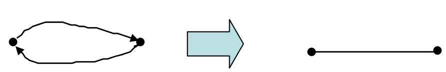


رأس تنها (isolated)

۱ **مجاور** به رأس ۲ است.

۲ **مجاور** از رأس ۱ است.

گراف بدون جهت:لبه ها جهت ندارند.



رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

مثال ۷-۲۶. با توجه به برنامه زیر یک گراف جهت دار $G=(V,E)$ ایجاد کنید که درآن $V=\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6,s_7,s_8\}$ و (s_i, s_j) در E می باشد اگر s_i باید قبل از s_j انجام شود.

$(s_1)\ b := 2;$

$(s_2)\ c := b+2;$

$(s_3)\ a := 1;$

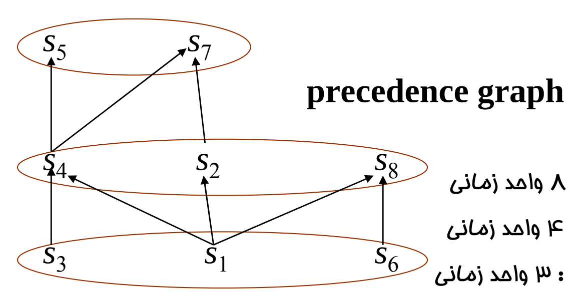
$(s_4)\ d := a*b+5;$

$(s_5)\ e := d-1;$

$(s_6)\ f := 7;$

$(s_7)\ e := c+d;$

$(s_8)\ g := b*f;$



۱ پردازنده: ۸ واحد زمانی

۲ پردازنده: ۴ واحد زمانی

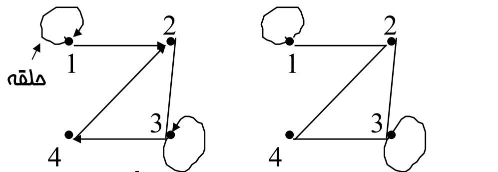
۳ پردازنده : ۳ واحد زمانی

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

مثال ۷-۲۷.

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2)\}$



نمایش گراف جهت دار

گراف بدون جهت مربوطه

گراف همبند(متصل): بین هر دو راس یک **مسیر** وجود دارد.

مسیر: رأس تکراری مجاز نمی باشد.

دور(چرخه): یک مسیر بسته (رأس شروع و پایان یکسان هستند)

تعریف ۷-۱۵. گراف همبند قوی: بین هر دو رأس یک مسیر جهت دار وجود دارد.

گراف بالا همبند قوی نمی باشد(مسیر جهت داری از ۳ به ۱ وجود ندارد).

رابطه ها: برخورد دوم

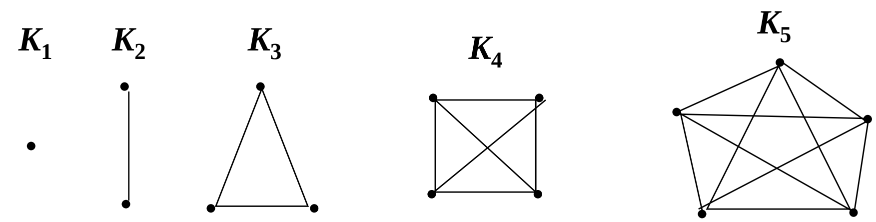
۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

مثال ۷-۲۸. **مولفه ها**

دو مولفه ای

یک مولفه

مثال ۷-۲۹. **گراف کامل(تام)** : بین هر دو رأس یک یال وجود دارد.



رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

directed graphs ⟷ relations

⇩ ⇩

adjacency matrices ⟷ relation matrices

مثال ۷-۳۰. اگر R یک رابطه روی مجموعه متناهی A باشد، R **انعکاسی** است اگر و فقط اگر گراف جهت دار آن در هر رأس شامل حلقه باشد.

مثال ۷-۳۱. اگر R یک رابطه روی مجموعه متناهی A باشد، R **متقارن** است اگر و فقط اگر گراف جهت دار آن فقط شامل حلقه ها و یال های بدون جهت باشد.

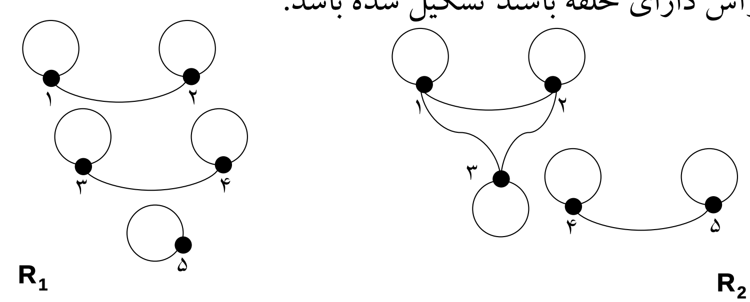
مثال ۷-۳۱. اگر R یک رابطه روی مجموعه متناهی A باشد، R **متعدی** است اگر و فقط اگر در گراف جهت دار آن مسیری از x به y باشد، یال (x, y) نیز موجود باشد.

مثال ۷-۳۱. اگر R یک رابطه روی مجموعه متناهی A باشد، R **پاد متقارن** است اگر و فقط اگر در گراف جهت دار غیر از حلقه ها یال بدون جهتی وجود نداشته نباشد.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

مثال ۷-۳۳. یک رابطه بر یک مجموعه متناهی A **هم ارزی** می باشد اگر و فقط اگر گراف بدون جهت مربوطه اش یک گراف کامل باشد که در هر رأس شامل حلقه باشد، یا از اجتماع از هم جدایی از گرا فهای کامل که در هر رأس دارای حلقه باشند تشکیل شده باشد.



رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جرئی: نمودارهای هاسه

natural counting: **N**
$x+5=2$: **Z**
$2x+3=4$: **Q**
$x^2-2=0$: **R**
$x^2+1=0$: **C**

توان بیشتر در حل معادلات چند جمله ای

ضمن عبور از R به C چیزی را از دست می دهیم :

توانايي "مرتب سازی" عناصر در C.

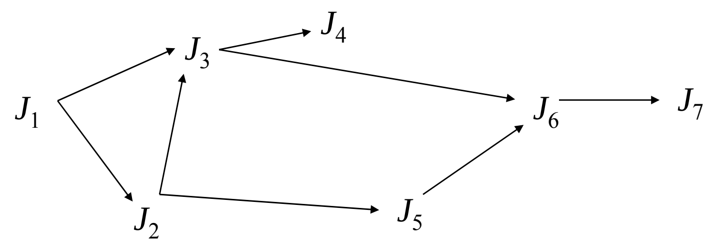
فرض کنیم R یک رابطه بر A باشد. زوج (A, R) را یک مجموعه **جزئی مرتب** (جم poset) می نامیم اگر رابطه R بر A یک رابطه ترتیب جزئی (تعریف ۶-۷) باشد.

مثال ۷-۳۴. فرض کنیم A مجموعه دروس ارائه شده در یک دانشکده باشد. رابطه R را بر A بوسیله xRy تعریف می کنیم اگر x و y درس یکسانی باشند و یا x پیش نیاز y باشد. در این صورت R مجموعه A را به یک مجموعه مرتب جزئی تبدیل می کند.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جرئی: نمودارهای هاسه

مثال ۷-۳۶. شبکه PERT (Performance Evaluation and Review Technique)



CPM:

زودترین زمان شروع و **دیر ترین زمان شروع** هر کار محاسبه می شود

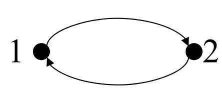
کارهایی که زودترین زمان شروع و دیرترین زمان شروعشان برابر است **بحرانی** هستند.

تمام کارهای بحرانی **مسیر بحرانی** را تشکیل می دهند.

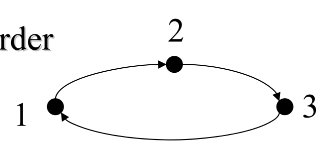
رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جرئی: نمودارهای هاسه

not partial order



پاد متقارن نیست



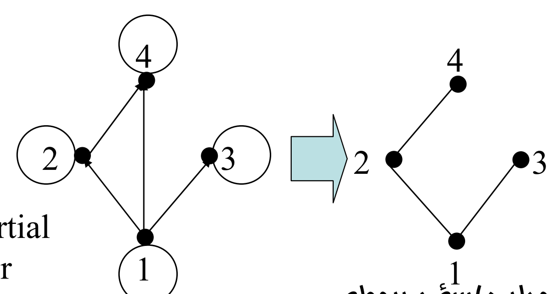
با فرض متعدی بودن:
پاد متقارن نیست

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جرئی: نمودارهای هاسه

مثال ۷-۳۷.

a partial order



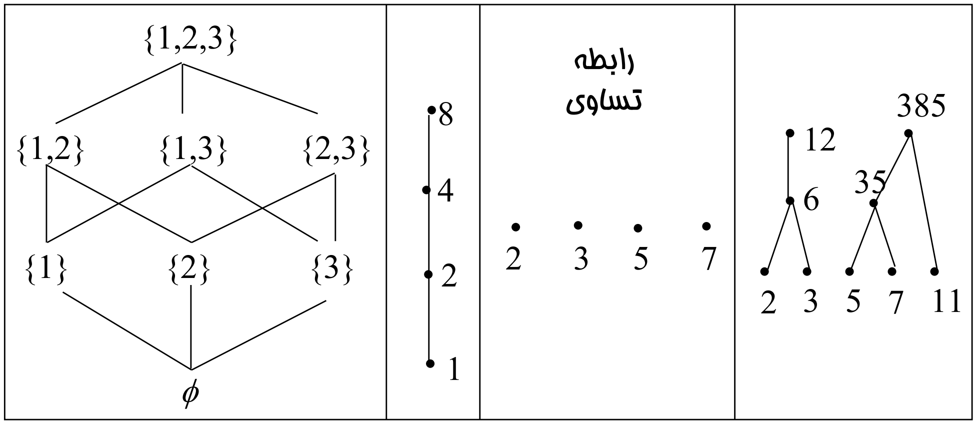
از پایین به بالا خوانده می شود.اتصالات مربوط به خواص انعکاسی (حلقه ها) و متعدی بودن نمایش داده نمی شوند.

نمودار هاسهٔ مربوطه

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

مثال ۷-۳۸.



رابطه زیر مجموعه بودن　　رابطه عاد کردن　　رابطه عاد کردن

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

تعریف ۷-۱۶. اگر (A, R) یک مجموعه مرتب جزئی باشد، گوییم A **ترتیب تام** است اگر بازاء هر x,y∈A داشته باشیم xRy یا yRx.در این صورت R یک رابطه ترتیب تام می باشد.

برای مثال ≤ و ≥ برای N ، Z، Q و R ترتیب تام هستند ولی برای C ترتیب جزئی هستند.

مثال. در اسلاید قبل فقط رابطه عاد کردن برای A={1, 2, 4, 8} ترتیب تام است.

سوال: آیا می توان عناصر یک مجموعه مرتب جزئی را به طریقی لیست نمود.

مرتب سازی برای یک مجموعه ترتیب تام

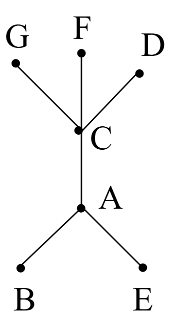
رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

مرتب سازی توپولوژیکی یک مجموعه مرتب جزئی

چگونه فعالیتها را یک به یک اجرا کنیم به طوریکه ترتیب جزئی نقض نشود؟

برای مثال:BEACGFD, ÉBACFGD

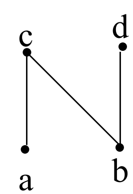


نمودار هاسه برای تعدای فعالیت

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

دنباله مرتب سازی توپولوژیکی (تعمیم خطی)



a^bc^d: 2 jumps

a^bd^c: 2 jumps

b^ac^d: 2 jumps

b^a^d^c: 3 jumps

bd^ ac: 1 jumps

یافتن یک تعمیم خطی با حداقل پرشهای ممکن
NP-Complete

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

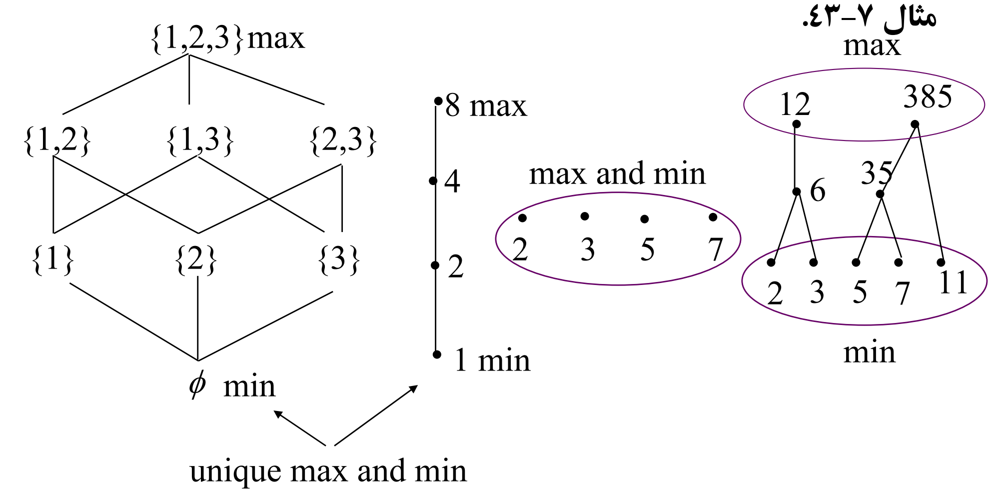
تعریف ۷-۱۷. اگر (A, R) یک مجموعه مرتب جزئی باشد، آنگاه عنصر $x \in A$ را یک عنصر **ماکزیمال** A نامیم اگر بازاء هر $a \in A$ ، $a \neq x \Rightarrow x \not R a$ (x به غیر از خودش با هیچ عنصری در رابطه نباشد). عنصر $y \in A$ یک عنصر **مینیمال** A است اگر بازاء هر $b \in A$ و $b \neq y$ ، $b \not R y$ (هیچ عنصری غیر از خودش با آن رابطه نداشته باشد).

مثال ۷-۴۲. $(Z, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی بدون عنصر ماکزیمال و مینیمال است.و $(N, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی با عنصر مینیمال صفر و بدون عنصر ماکزیمال است.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

مثال ۷-۴۳.



رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

قضیه ۷-۳. هرگاه (A, R) یک مجموعه مرتب جزئی بوده و A متناهی باشد، آنگاه A هم عنصر ماکزیمال و هم عنصر مینیمال دارد.

(اثبات؟)

در الگوریتم مرتب سازی توپولوژیکی هر بار یک عنصر ماکزیمال و یا هر بار یک عنصر مینیمال می یابیم.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

تعریف ۷-۱۸. هرگاه (A, R) یک مجموعه مرتب جزئی باشد، آنگاه عنصر $x \in A$ را **کوچکترین** عنصر می نامیم اگر بازاء هر $a \in A$، xRa. عنصر $y \in A$ را **بزرگترین** عنصر می گوییم اگر بازاء هر $a \in A$، aRy.

مثال ۷-٤٤. فرض کنیم $U=\{1,2,3\}$ و R رابطه زیرمجموعه باشد.

(آ) بازاء $A=P(U)$ ، مجموعه مرتب جزئی (A,R) مجموعه Ø را به عنوان کوچکترین عنصر و مجموعه U را به عنوان بزرگترین عنصر دارد.

(ب) فرض کنیم B مجموعه تمام زیرمجموعه های غیر تهی U باشد. مجموعه مرتب جزئی $(B, \subseteq)$ دارای بزرگترین عنصر U می باشد. در اینجا کوچکترین عنصر نداریم ولی سه عنصر مینیمال خواهیم داشت.

(پ) فرض کنیم C مجموعه تمام زیرمجموعه های سره U باشد. در این صورت مجموعه مرتب جزئی $(C, \subseteq)$ دارای مجموعه تهی به عنوان کوچکترین عنصر می باشد و بزرگترین عنصر وجود ندارد، اما سه عنصر ماکزیمال خواهیم داشت.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

قضیه ۷-٤. هرگاه مجموعه جزئی مرتب (A, R) دارای بزرگترین(کوچکترین) عنصر باشد، این عنصر منحصر به فرد است.

اثبات. فرض کنیم $x,y \in A$ و هر دو بزرگترین عنصر باشند. در این صورت (x,y) و (y,x) هر دو در R هستند و چون R پادمتقارن است $x=y$. اثبات درمورد کوچکترین عنصر به همین شکل می باشد.

تعریف ۷-۱۹. فرض کنیم (A, R) یک مجموعه جزئی مرتب باشد به طوری که $B \subseteq A$. عنصر $x \in A$ را **کران پایینی** B می گوییم اگر بازاء هر $b \in B$ ، xRb. به همین نحو عنصر $y \in A$ را **کران بالایی** B گوییم اگر بازاء هر $b \in B$، bRy.

عنصر $x' \in A$ را **بزرگترین کران پایینی** B (glb) گوییم اگر کران پایینی B بوده و بازاء هرکران پایینی دیگر B مانند x'' داشته باشیم $x''Rx'$.

به همین نحو، عنصر $y' \in A$ را **کوچکترین کران بالایی** B (lub) گوییم اگر کران بالایی B بوده و بازاء هرکران بالایی دیگر B مانند y'' داشته باشیم $y'Ry''$.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

مثال ۷-٤٦. فرض کنیم $U=\{1,2,3,4\}$ و $A=P(U)$ و R رابطه زیر مجموعه بر A باشد. هرگاه $B=\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ باشد، آنگاه $\{1,2\}$، $\{1,2,3\}$،$\{1,2,,4\}$ و $\{1,2,3,4\}$ همه کرانهای بالایی B می باشند ولی $\{1,2\}$ کوچکترین کران بالایی است. در حالی که بزرگترین کران پایینی B مساوی $\varnothing$ است که در B نیست.

مثال ۷-۴۷. فرض کنیم R رابطه"کوچکتر یا مساوی" در مجموعه جزئی مرتب (A, R) باشد.

(آ) هرگاه $A=\mathbf{R}$(real numbers) و $B=[0, 1]$، آنگاه B دارای glb مساوی صفر و lub برابر یک است. توجه کنید که $0,1 \in B$. بازاء $C=(0, 1]$ ، C دارای glb برابر صفر و lub برابر ۱ می باشد، و $1 \in C$ اما صفر متعلق به C نمی باشد.

(ب) اگر $A=\mathbf{R}$ و $B=\{q \in Q| q^2 < 2\}$، در این صورت B دارای lub مساوی $\sqrt{2}$ و glb برابر $-\sqrt{2}$ است.و هیچ یک از این اعداد حقیقی در B نیستند.

(پ) حال فرض می کنیم که $A=Q$ و B همانند قسمت (ب) باشد. در اینجا B نه glb دارد و نه lub.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

قضیه ۷-۵. هرگاه (A, R) یک مجموعه جزئی مرتب بوده و $B \subseteq A$ ، آنگاه B حداکثر یک glb (lub) دارد.

تعریف ۷-۲۰. مجموعه جزئی مرتب (A, R) را یک **شبکه** (lattice) نامیم اگر بازاء هر $x,y \in A$ ، عناصر $lub\{x, y\}$ و $glb\{x, y\}$ هر دو در A موجود باشند.

مثال ۷-٤۸. بازاء $A=\mathbf{N}$ و $x,y \in N$، xRy را با $x \leq y$ تعریف می کنیم. در این صورت $lub\{x, y\}=max\{x, y\}$ و $glb\{x, y\}=min\{x, y\}$ و بنابراین $(N, \leq)$ یک شبکه می باشد.

مثال ۷-٤۹. بازاء مجموعه جزئی مرتب مثال ۷-۴۴(آ) ، هرگاه $S,T \subseteq U$ و $glb\{S, T\}=S \cap T$ و $lub\{S, T\}=S \cup T$، آنگاه $(P(U), \subseteq)$ یک شبکه است.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۴. روابط هم ارزی و افراز ها

تعریف ۷-۲۱. مجموعه A و مجموعه اندیس گذار I داده شده اند. همچنین بازاء هر $i \in I$، $\varnothing \neq A_i \subseteq A$. در این صورت $\{A_i\}_{i \in I}$ یک **افراز** A است اگر

(آ) $A=\cup A_i$ و $i \in I$و

(ب) بازاء هر $I,j \in I$ که $i \neq j$، $A_i \cap A_j=\varnothing$.

هر زیر مجموعه A_i را یک **سلول** یا **بلوک** افراز می نامیم.

مثال ۷-٥۱. اگر $A=\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$، آنگاه هرمورد زیر یک افراز A می باشد:

(آ) $A_1=\{1, 2, 3, 4, 5\}, A_2=\{6, 7, 8, 9, 10\}$.

(ب) $A_1=\{1, 2, 3\}, A_2=\{4, 6, 7, 9\}, A_3=\{5, 8, 10\}$.

(پ) $A_i=\{i, i+5\}, 1 \leq i \leq 5$.

رابطه ها: برخورد دوم

۴-۷. روابط هم ارزی و افراز ها

تعریف ۷-۲۲. فرض کنیم R یک رابطه هم ارزی بر مجموعه A باشد. بازاء هر $x\in A$، **رده هم ارزی** (کلاس هم ارزی) x با $[x]$ نشان داده شده و بوسیله $[x]=\{y\in A|yRx\}$ تعریف می شود.

مثال ۷-۵۳. رابطه R را بر Z با xRy اگر $4|(x-y)$ تعریف می کنیم. برای این رابطه هم ارزی داریم:

$$[0]=\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}=\{4k|k\in Z\}$$
$$[1]=\{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\}=\{4k+1|k\in Z\}$$
$$[2]=\{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\}= \{4k+2|k\in Z\}$$
$$[3]=\{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}=\{4k+3|k\in Z\},$$

$\{[0], [1], [2], [3]\}$ یک افراز Z می باشد.

رابطه ها: برخورد دوم

۴-۷. روابط هم ارزی و افراز ها

مثال ۷-٥٤. فرض کنیم برای هر $a, b\in Z$ ، aRb اگر $a^2=b^2$. بنابراین R یک رابطه هم ارزی می باشد(چرا؟). راجع به افراز نظیر Z چه می توان گفت؟

به طور کلی بازاء هر $n\in Z^+$، $[n]=[-n]=\{n, -n\}$ و بنابراین : $Z=\bigcup_{n=0}^{\infty}[n].$

قضیه ۷-٦. هرگاه R یک رابطه هم ارزی بر مجموعه A بوده و $x,y\in A$، آنگاه

(آ) $x\in[x]$؛

(ب) xRy اگر و فقط اگر $[x]=[y]$؛ و

(پ) $[x]=[y]$ یا $[x]\cap[y]=\emptyset$.

رابطه ها: برخورد دوم

۴-۷. روابط هم ارزی و افراز ها

مثال ۷-۵۸. اگر رابطه هم ارزی R بر $A=\{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ افراز $A=\{1,2\}\cup\{3\}\cup\{4, 5, 7\}\cup\{6\}$ را ایجاد کند ، R چیست؟

$$R=(\{1,2\}*\{1,2\})\cup(\{3\}*\{3\})\cup(\{4, 5, 7\}*\{4, 5, 7\})\cup(\{6\}*\{6\}),$$
$$|R|=2^2+1^2+3^2+1^2=15.$$

قضیه ۷-۷. هرگاه A یک مجموعه باشد، آنگاه

(آ) هر رابطه هم ارزی مانند R بر A یک افراز بر A را ایجاد می کند، و

(ب) هر افراز A یک رابطه هم ارزی مانند R بر A را به دست می دهد.

قضیه ۷-۸. بازاء هر مجموعه A یک تناظر یک به یک بین مجموعه روابط هم ارزی بر Aو مجموعه افرازهای A وجود دارد.

رابطه ها: برخورد دوم

۴-۷. روابط هم ارزی و افراز ها

مثال ۷-۵۹. (آ) اگر $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، چند رابطه بر A هم ارزی اند.

تناظر یک به یک میان روابط هم ارزی و افرازها

$$\therefore \sum_{i=1}^{6} S(6,i)=203$$

چند رابطه هم ارزی در $1,2\in[4]$ صدق می کنند.

۱ و ۲و ۴ در یک افراز هستند و

$$\therefore \sum_{i=1}^{4} S(4,i)=15.$$