فصل دوم
مبانی منطق

سید ناصر رضوی

e-mail: razavi@comp.iust.ac.ir

۱۳۸۵

فصل۲. منطق

۱-۲ رابط های اولیه و جداول درستی

منطق: به مجموعه قواعدی که بتوان به کمک آنها اعتبار یک استدلال را تعیین نمود منطق می گوییم.

گزاره: جمله ای خبری که یا **درست** و یا **نادرست** باشد- نه هر دو.

مثال:

مارگارت میچل کتاب برباد رفته را نوشته است.

۲ + ۳ = ۵

جملات زیر گزاره نمی باشند:

چه هوای خوبی! (جمله ندایی)

بلند شو تمرین هایت را انجام بده. (جمله امری)

فصل۲. منطق

۱-۲ رابط های اولیه و جداول درستی

گزاره ساده: گزاره ایست که قابل تجزیه به گزاره های ساده تر نبوده و مستقلا دارای ارزش درست یا نادرست باشد.

گزاره مرکب: از ترکیب گزاره های ساده بوسیله **رابط های منطقی** و یا **نقیض** بدست می آید.

رابط های منطقی:

ترکیب عطفی(AND): $p \wedge q$

ترکیب فصلی (OR): $p \vee q$

یای انحصاری (exclusive or): $p \oplus q$

ترکیب شرطی: $p \rightarrow q$ (اگر p آنگاه q)

ترکیب دو شرطی: $p \leftrightarrow q$ (p اگر و فقط اگر q) یا (p iff q)

فصل۲. منطق

۱-۲ رابط های اولیه و جداول درستی

"عدد x یک عدد صحیح است" گزاره نمی باشد، زیرا **ارزش درستی** آن را تا زمانیکه به x مقداری نسبت داده نشود، نمی توان تعیین نمود.

منطق مرتبه اول (First Order Logic) و منطق گزاره ای

فصل ۲. منطق

۲-۱ رابط های اولیه و جداول درستی

جداول درستی

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

فصل ۲. منطق

۲-۱ رابط های اولیه و جداول درستی

مثال ۱-۲.

s: هومن به پیاده روی می رود.

t: ماه می درخشد.

u: هوا برفیست.

$$(t \wedge \neg u) \to s$$

هرگاه ماه بدرخشد و هوا برفی نباشد، آنگاه هومن به پیاده روی می رود.

$$t \to (\neg u \to s)$$

هرگاه ماه بدرخشد، آنگاه اگر هوا برفی نباشد، هومن به پیاده روی می رود.

فصل ۲. منطق

۲-۱ رابط های اولیه و جداول درستی

گزاره همیشه درست (راستگو، تاتولوژی): یک گزاره مرکب که به ازاء تمام ترکیبات ارزشی گزاره های ساده تشکیل دهنده آن همواره ارزش آن برابر درست باشد.

$$p \to (p \vee q)$$

گزاره همیشه نادرست (تناقض): یک گزاره مرکب که به ازاء تمام ترکیبات ارزشی گزاره های ساده تشکیل دهنده آن همواره ارزش آن برابر نادرست باشد.

$$p \wedge (\neg p \wedge q)$$

فصل ۲. منطق

۲-۱ رابط های اولیه و جداول درستی

استدلال معتبر:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$$

مفروضات نتیجه

هرگاه یکی از مفروضات نادرست باشد، آنگاه مستقل از ارزش q، استلزام فوق درست می باشد.در نتیجه هرگاه با مفروضاتی که همگی دارای ارزش درست باشند شروع کنیم و دریابیم که تحت این شرایط q نیز دارای ارزش درست می باشد، آنگاه استلزام

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$$

یک تاتولوژی می باشد و ما یک **استدلال معتبر** داریم.

فصل۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

مثال ۲-۷:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

$s_1 \Leftrightarrow s_2$

تعریف ۲-۲: **هم ارزی منطقی**

فصل۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

$$(p \to q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$$
$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$$
$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$
$$(p \oplus q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$$
$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

نتیجه: - رابط استلزام را می توان بر حسب نقیض و ترکیب فصلی نوشت.
- ترکیب دو شرطی را نیز می توان برحسب نقیض، ترکیب فصلی و ترکیب عطفی نوشت.
- بنابراین همواره می توانیم رابط های $\to$ و $\leftrightarrow$ را از گزاره های مرکب حذف کنیم .

بنابراین AND یا OR و NOT باهم یک مجموعه تابعی کامل را می سازند.

فصل۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

مثال ۲-۸: قوانین دمورگان

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

p و q می توانند هر گزاره مرکبی باشند.

فصل۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

۱. حذف نقیض مضاعف

$$(1) \neg\neg p \Leftrightarrow p$$

۲. قوانین دمورگان

$$(2) \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

۳. قوانین جا بجایی

$$(3)\, p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$
$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

٤. قوانین شرکت پذیری

$$(4)\, p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$
$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

۵. **قوانین توزیع پذیری**
$$(5)\; p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$$
$$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$$

۶. **قوانین خودتوانی**
$$(6)\; p\vee p\Leftrightarrow p,\; p\wedge p\Leftrightarrow p$$

۷. **قوانین همانی**
$$(7)\; p\vee F_0\Leftrightarrow p,\; p\wedge T_0\Leftrightarrow p$$

۸. **قوانین معکوس**
$$(8)\; p\vee\neg p\Leftrightarrow T_0,\; p\wedge\neg p\Leftrightarrow F_0$$

۹. **قوانین تسلط**
$$(9)\; p\vee T_0\Leftrightarrow T_0,\; p\wedge F_0\Leftrightarrow F_0$$

۱۰. **قوانین جذب**
$$(10)\; p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow p,\; p\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow p$$

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

تعریف ۲-۳. اگر s گزاره ای باشد که شامل هیچ رابط منطقی غیر از ترکیب عطفی و فصلی نباشد، آنگاه **دوگان** s که با s^d نشان داده می شود گزاره ایست که از s و با جایگزینی AND و OR به جای یکدیگر و نیز T و F به جای یکدیگر حاصل می شود.

مثال: $s:(p\wedge\neg q)\vee(r\wedge T_0),\; s^d:(p\vee\neg q)\wedge(r\vee F_0)$

دوگان $p\to q$ برابر است با: $(\neg p\vee q)^d \Leftrightarrow \neg p\wedge q$

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

قضیه ۲-۱ (اصل دوگانی). فرض می کنیم که گزاره های s و t شامل رابط های منطقی غیر از $\wedge$ و $\vee$ نباشند.در این صورت هرگاه $s\Leftrightarrow t$ آنگاه $s^d\Leftrightarrow t^d$.

قانون اول جایگزینی (جایگزینی هر رخداد p با گزاره دیگری مانند q)

مثال ۲-۱۰. $P:\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$ یک تاتولوژی است، حال اگر تمام p ها را درآن با $r\wedge s$ جایگزین کنیم، گزاره حاصل بازهم یک تاتولوژی می باشد.

$$P_1:\neg[(r\wedge s)\vee q]\leftrightarrow[\neg(r\wedge s)\wedge\neg q]$$

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

قانون دوم جایگزینی

مثال ۲-۱۱.

$P:(p\to q)\to r$

$P_1:(\neg p\vee q)\to r$

چون $(p\to q)\Leftrightarrow(\neg p\vee q)$ بنابراین $P\Leftrightarrow P_1$

مثال ۲-۱۲. گزاره مرکب $(p\vee q)\to r$ را نقیض و سپس ساده کنید.

$$\neg[(p\vee q)\to r]\Leftrightarrow\neg[\neg(p\vee q)\vee r]\Leftrightarrow$$
$$\neg[(\neg p\wedge\neg q)\vee r]\Leftrightarrow\neg(\neg p\wedge\neg q)\wedge\neg r\Leftrightarrow$$
$$(p\vee q)\wedge\neg r$$

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

مثال ۲-۱۳. نقیض گزاره زیر را بدست آورید:

" اگر هاله به کنار دریا برود، آنگاه الهام پول خریدهای او را می پردازد"

جواب:

چون $\neg(p \to q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

بنابراین نقیض جمله بالا به شکل زیر است:

"هاله به کنار دریا می رود ولی الهام پول خریدهای او را نمی پردازد"

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

مثال ۲-۱۵.

عکس نقیض

p	q	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$q \to p$	$\neg p \to \neg q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

معکوس

عکس

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

کارآیی دو قطعه برنامه زیر را مقایسه کنید.

```
x:=4;
for i:=1 to 10 do
  begin
    x:=x-1;
    y:=x+3*i;
    if ((x>0) and (y>0)) then
      writeln('The value of the sum x+y is', x+y)
  end;
```

تعداد مقایسه ها:

– سمت چپ ۲۰ بار

– سمت راست ۱۳= ۳+ ۱۰ بار

```
.
.
.
if x>0 then
  if y>0 then
    ...
```

$$(p \wedge q) \to r \;\Leftrightarrow\; p \to (q \to r)$$

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

ساده سازی گزاره های مرکب

مثال ۲-۱۶.

$(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg q)$ دمورگان

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ نقیض مضاعف

$\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q)$ توزیع پذیری

$\Leftrightarrow p \vee F_0 \Leftrightarrow p$ همانی

فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

استدلال زیر

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$$

یک استدلال معتبر است اگر و فقط اگر استلزام زیر

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$$

یک گزاره همیشه درست (تاتولوژی) باشد.

فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۱۹.

p: هومن درس می خواند. q: هومن تنیس بازی می کند.

r: هومن در درس ریاضی گسسته قبول می شود.

مفروضات:

p_1: اگر هومن درس بخواند، آنگاه در درس ریاضی گسسته قبول می شود.

p_2: اگر هومن تنیس بازی نکند، آنگاه درس می خواند.

p_3: هومن در درس ریاضی گسسته قبول نمی شود.

حال می خواهیم تعیین کنیم آیا استدلال $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow q$ معتبر است یا خیر.

$$p_1 : p \rightarrow r,\ p_2 : \neg q \rightarrow p,\ p_3 : \neg r$$

$$\therefore (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow q \Leftrightarrow$$

$$\boxed{[(p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge \neg r] \rightarrow q}$$

تاتولوژی

(اسلاید بعد)

فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

p	q	r	$p \rightarrow r$	$\neg q \rightarrow p$	$\neg r$	$[(p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge \neg r] \rightarrow q$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1

فصل ۲. منطق

۳-۲ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۰.

p_1				p_2	q	
p	r	s	$p \wedge r$	$(p \wedge r) \rightarrow s$	$r \rightarrow s$	$[p \wedge ((p \wedge r) \rightarrow s)] \rightarrow (r \rightarrow s)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

تعریف ۲-۴. هرگاه p و q دوگزاره دلخواه باشند به طوریکه $p \to q$ یک گزاره همیشه درست (تاتولوژی) باشد، آنگاه می گوییم p به طور منطقی مستلزم q می باشد و این وضعیت را به صورت زیر می نویسیم:

$$p \Rightarrow q$$

$p \Rightarrow q$ به معنای آن است که $p \to q$ یک تاتولوژی می باشد.

$p \Leftrightarrow q$ به معنای آن است که $p \leftrightarrow q$ یک تاتولوژی می باشد.

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

قوانین استنتاج: برای تعیین اعتبار و یا عدم اعتبار یک استدلال بدون نیاز به ساختن جدول درستی استفاده می شوند.

نکته: تعداد سطرهای یک جدول درستی برای n متغیرگزاره ای برابر 2^n می باشد. مثلا اگر $n = 10$ آنگاه جدول درستی دارای ۱۰۲۴ سطر خواهد بود.

مثال ۲-۲۲. قانون **قیاس استثنایی** یا **تفکیک**(Modus Ponens)

$$[p \wedge (p \to q)] \to q \qquad \begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۳. قانون **قیاس** (Syllogism)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore\ p \to r \end{array} \qquad [(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

مثال ۲-۲۴.

هاله کیک می پزد.

اگر هاله کیک بپزد، آنگاه پیانو تمرین نمی کند.

اگر هاله پیانو تمرین نکند، آنگاه پدرش برای او اتومبیل نخواهد خرید.

بنابراین، پدر هاله برای او اتومبیل نخواهد خرید.

$$\begin{array}{l} p \\ p \to \neg q \\ \neg q \to \neg r \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۵. **قانون استنتاج روش انکار** (Modus Tollens)

$$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p \qquad \begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

مثال:

اگر هاله رئیس انجمن بانوان شده باشد، آنگاه الهام عضو انجمن خواهد شد.

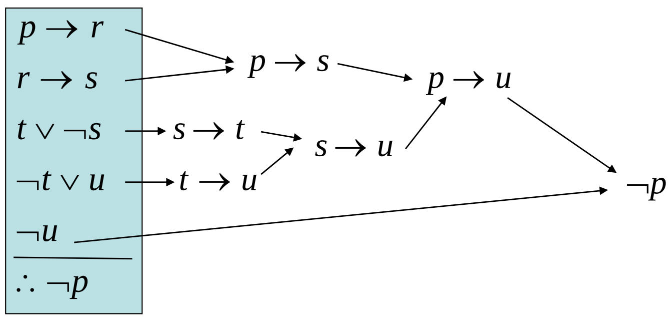
الهام عضو انجمن نشده است.

بنابراین، هاله رئیس انجمن بانوان نشده است.

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

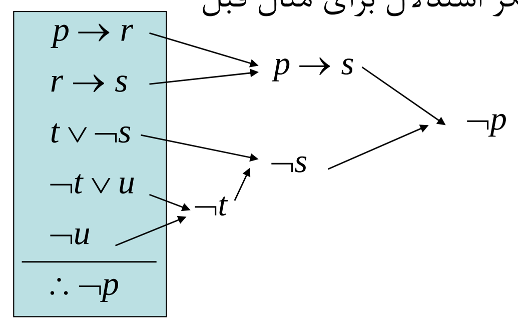
مثال:



فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال: روش دیگر استدلال برای مثال قبل



فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

سفسطه (Fallacy)

(۱) اگر مارگارت تاچر رئیس جمهور امریکا باشد، آنگاه حداقل ۳۵ ساله می باشد.

(۲) مارگارت تاچر حداقل ۳۵ ساله می باشد.

(۳) بنابراین، مارگارت تاچر رئیس جمهور امریکا می باشد.

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg p \\ \hline \therefore\ \neg q \end{array}$$

سفسطه

(۱) اگر ۶ = ۳ + ۲ ، آنگاه ۶ = ۴ + ۲.

(۲) ۶ ≠ ۳ + ۲.

(۳) بنابراین، ۶ ≠ ۴ + ۲.

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۶. ***قاعده عطف***

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

مثال ۲-۲۷. ***قاعده قیاس فصلی*** (رزولوشن)

(۱) کیف پول هومن در جیب او و یا روی میز است.

(۲) کیف پول هومن در جیب او نیست.

(۳) ؟

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۸. قاعده تناقض (برهان خلف)

$$\begin{array}{l} \neg p \to F_0 \\ \hline \therefore p \end{array}$$

$$\neg(p \to q) \Leftrightarrow$$
$$\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow$$
$$p \wedge \neg q$$

اثبات بوسیله تناقض:

برای اثبات $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$

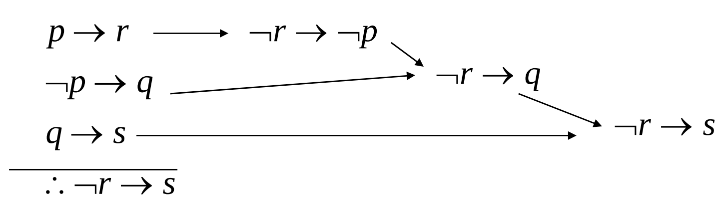
اثبات می کنیم $\neg((p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q) \to F_0 \Leftrightarrow$

$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg q) \to F_0$

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

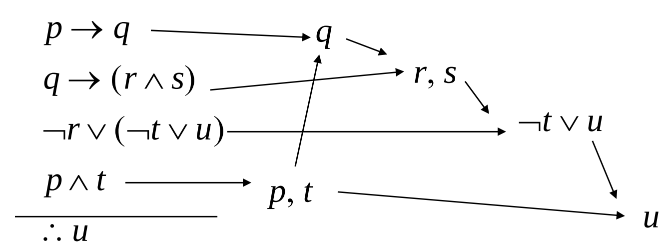
مثال ۲-۲۹. اثبات گزاره های شرطی



فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۳۰.



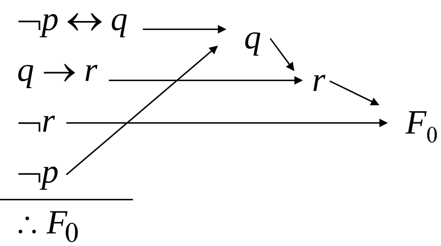
روش منظم و سیستماتیکی برای اثبات وجود ندارد به جز روش جدول درستی (2^n)

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۳۲. اثبات بوسیله تناقض (برهان خلف)

$$\begin{array}{l} \neg p \leftrightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \neg r \\ \hline \therefore p \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \neg p \leftrightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \neg r \\ \neg p \\ \hline \therefore F_0 \end{array}$$



فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

اثبات نتایج شرطی:

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \rightarrow r \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ q \\ \hline \therefore r \end{array}$$

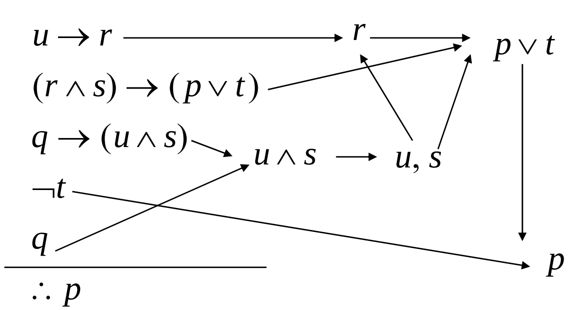
$$\begin{aligned} & p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \Leftrightarrow\ & \neg p \vee (q \rightarrow r) \\ \Leftrightarrow\ & \neg p \vee (\neg q \vee r) \\ \Leftrightarrow\ & (\neg p \vee \neg q) \vee r \\ \Leftrightarrow\ & \neg (p \wedge q) \vee r \\ \Leftrightarrow\ & (p \wedge q) \rightarrow r \end{aligned}$$

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۳۳.

$$\begin{array}{l} u \rightarrow r \\ (r \wedge s) \rightarrow (p \vee t) \\ q \rightarrow (u \wedge s) \\ \neg t \\ \hline \therefore q \rightarrow p \end{array}$$



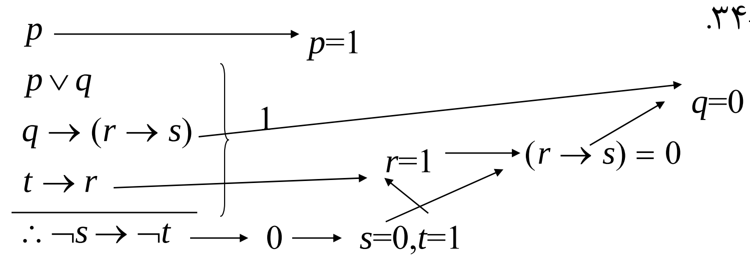
فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

سوال: چگونه اثبات کنیم که یک استدلال نا معتبر است؟

جواب: فقط کافی است که یک مثال نقض بیابیم.

مثال ۲-۳۴.



فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

تعریف ۲-۵. هر جملهٔ خبری یک *گزاره باز* است اگر:

(۱) شامل یک یا چند **متغیر** بوده، و

(۲) یک گزاره نباشد، ولی

(۳) وقتی متغیرهای آن با **مقادیر مجاز** جایگزین شوند، به یک گزاره تبدیل شود.

عالم سخن

مثال: عدد $x+2$ یک عدد صحیح زوج است.

$x=y$، $x>y$، $x<y$ ...

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

نمادگذاری:

$p(x)$: عدد $x+2$ یک عدد صحیح زوج است.

$q(x,y)$: اعداد y-2، x-y و x+2y اعداد صحیح زوج هستند.

$p(5)$: نادرست، $p(6)$: درست، $q(4, 2)$:درست، $q(3, 4)$: نادرست

بنابراین:

بازاء برخی از مقادیر x، $p(x)$ درست و نقیض آن نادرست است.

بازاء برخی از مقادیر x و y، $q(x, y)$ درست و نقیض آن نادرست است.

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

سور وجودی: برای برخی از مقادیر x: $\exists x p(x)$

سور عمومی: برای تمام مقادیر x: $\forall x p(x)$

x در $p(x)$: **متغیر آزاد**

x در $\exists x p(x)$ **متغیر مقید**. بنابراین $\exists x p(x)$ یا درست است و یا نادرست.

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

مثال ۲-۳۶. عالم سخن: اعداد حقیقی

$p(x): x \geq 0$

$q(x): x^2 \geq 0$

$r(x): x^2 - 3x - 4 = 0$

$s(x): x^2 - 3 > 0$

$\exists x[p(x) \wedge r(x)]: TRUE$ $\quad x=4$

$\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]: TRUE$

$\exists x[p(x) \rightarrow q(x)]: TRUE$

$\forall x[q(x) \rightarrow s(x)]: FALSE$ $\quad x=1$

$\forall x[r(x) \vee s(x)]: FALSE$ $\quad x=5,6,...$

$\forall x[r(x) \rightarrow p(x)]: FALSE$ $\quad x=-1$

فصل۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

مثال ۲-۳۷. سور ضمنی

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Longleftrightarrow \forall x(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$$

"عدد صحیح ۴۱ مساوی مجموع دو مجذور کامل است"

برابر است با:

$$\exists m \exists n[41 = m^2 + n^2]$$

فصل۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

تعریف ۲-۶. هم ارزی منطقی برای گزاره های باز $p(x)$ و $q(x)$

$$\forall x[p(x) \Leftrightarrow q(x)]$$

یعنی باید بازاء هر x در عالم سخن گزاره زیر درست باشد:

$$p(x) \leftrightarrow q(x)$$

$p(x)$ به طور منطقی مستلزم $q(x)$ است: $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$

فصل۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

مثال ۲-۴۲.عالم سخن: تمام اعداد صحیح

$r(x): 2x + 1 = 5$

$s(x): x^2 = 9$

$\exists x[r(x) \wedge s(x)]$ نادرست است، ولی

$\exists x r(x) \wedge \exists x s(x)$ درست می باشد. بنابراین:

$$\exists x[r(x) \wedge s(x)] \not\Leftrightarrow \exists x r(x) \wedge \exists x s(x)$$

اما:

$$\exists x[p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)]$$

فصل۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

بازاء یک عالم سخن مشخص و هر دو گزاره باز $p(x)$ و $q(x)$

$$\exists x[p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)]$$
$$\exists x[p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow [\exists x p(x) \vee \exists x q(x)]$$
$$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)]$$
$$[\forall x p(x) \vee \forall x q(x)] \Rightarrow \forall x[p(x) \vee q(x)]$$

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

نحوه نقیض کردن یک جمله سوردار شامل یک متغیر:

$$\neg[\forall x p(x)] \Leftrightarrow \exists x \neg p(x)$$
$$\neg[\exists x p(x)] \Leftrightarrow \forall x \neg p(x)$$
$$\neg[\forall x \neg p(x)] \Leftrightarrow \exists x p(x)$$
$$\neg[\exists x \neg p(x)] \Leftrightarrow \forall x p(x)$$

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

مثال ۲-۴۴

$p(x)$: x فرد است.

$q(x)$: x^2-1 زوج است.

فرمول گزاره ای $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ را نقیض کنید.

$$\neg[\forall x(p(x) \rightarrow q(x)] \Leftrightarrow \exists x[\neg(p(x) \rightarrow q(x))]$$
$$\Leftrightarrow \exists x[\neg(\neg p(x) \vee q(x))] \Leftrightarrow \exists x[p(x) \wedge \neg q(x)]$$

“وجود دارد x به گونه ای که x فرد است و x^2-1 زوج نیست” (نادرست)

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

متغیرهای چندگانه

$$\forall x \forall y p(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x p(x,y)$$
$$\exists x \exists y p(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x p(x,y)$$

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

مثال ۲-۴۸.

$p(x, y)$: $x + y = 17$;

$\forall x \exists y p(x,y)$ برای هر x یک عدد صحیح مانند y وجود دارد به گونه ای که $x + y = 17$ (درست)

$\exists y \forall x p(x,y)$ یک عدد صحیح مانند y وجود دارد به گونه ای که بازاء تمام اعداد صحیح مانند x، $x+y=17$

بنابراین: $\forall x \exists y p(x,y) \neq \exists y \forall x p(x,y)$

فصل۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

مثال ۲-۴۹.

$$
\begin{aligned}
&\neg[\forall x \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]] \\
&\Leftrightarrow \exists x[\neg \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]] \\
&\Leftrightarrow \exists x \forall y \neg[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)] \\
&\Leftrightarrow \exists x \forall y \neg[\neg[p(x,y) \wedge q(x,y)] \vee r(x,y)] \\
&\Leftrightarrow \exists x \forall y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \wedge \neg r(x,y)]
\end{aligned}
$$

فصل۲. منطق

تمرینات

۲-۲. تمرین ۲۰

۲-۳. تمرین ۱۰

۲-۴. تمرین ۱۸و ۲۶