فصل یازدهم
نظریه گراف

سید ناصر رضوی
e-mail: razavi@comp.iust.ac.ir
۱۳۸۵

نظریه گراف

- کاربردها در علوم کامپیوتری
  - طراحی مدارهای منطقی
  - هوش مصنوعی
  - زبانهای صوری
  - گرافیک کامپیوتری
  - ...

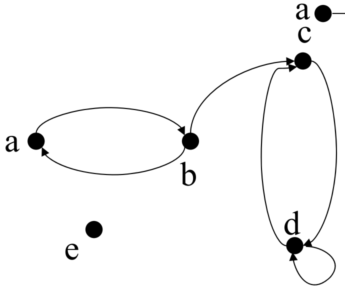
فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۱. تعاریف و مثالها

تعریف ۱۱-۱. فرض کنیم V یک مجموعه متناهی و غیرتهی بوده و $E \subseteq V*V$. زوج (V, E) را یک **گراف جهت دار** (بر V) می نامیم که در آن V مجموعه **رئوس** یا **گره ها** بوده و E مجموعه **لبه ها** **(یال ها)** می باشد. برای نمایش چنین گرافی می نویسیم $G = (V, E)$.

اگر زوج مرتب (a, b) متعلق به E باشد، آنگاه a را **مجاور به** b و b را **مجاور از** a می نامیم و به شکل این نمایش می دهیم: $a \longrightarrow b$

مثال: گراف جهت دار



$V=\{a, b, c, d, e\}$

$E=\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$

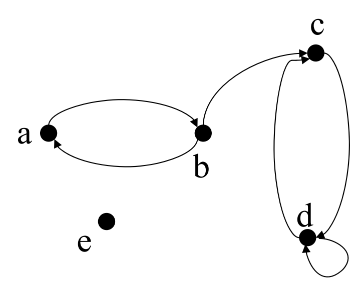
$G=(V, E)$

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۱. تعاریف و مثالها

حلقه(loop): هر یالی که از یک رأس به همان رأس ترسیم شود مانند یال (d, d).

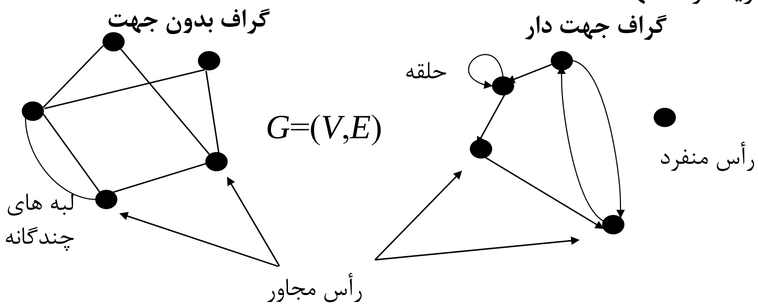
رأس منفرد: رأسی که از آن یالی نگذرد مانند e.



گراف بدون جهت: اگر V یک مجموعه متناهی و غیرتهی و E مجموعه ای باشد که هر عضو آن یک زیرمجموعه دو عضوی از V باشد، در این صورت زوج (V, E) را یک گراف بدون جهت می نامیم.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۱. تعاریف و مثالها



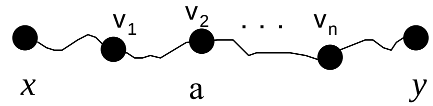
گراف ساده: یک گراف بدون جهت و بدون حلقه و بدون لبه های چندگانه

درجه یک رأس: تعداد لبه های متصل به آن رأس (درجه ورودی و خروجی)

در گرا ف ساده: $\sum_{v_i \in V} \deg(v_i) = 2|E|$

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۱. تعاریف و مثالها



مسیر(path): رأس تکراری مجاز نیست.

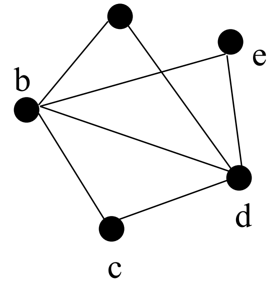
a-b-c-d-e

راه(trail): لبه تکراری مجاز نیست.

a-b-c-d-e-b-d

گردش(walk): بدون محدودیت.

a-b-d-a-b-c



طول: تعداد لبه ها در مسیر، راه، گردش

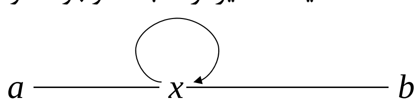
مدار(circuit) : راه بسته (x=y)- مانند a-b-c-d-b-e-d-a

دور(cycle): مسیر بسته (x=y)- مانند a-b-c-d-a

فصل ۱۱. نظریه گراف

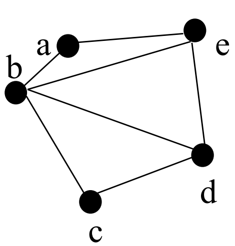
۱۱-۱. تعاریف و مثالها

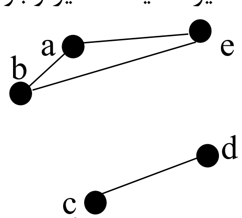
قضیه ۱۱-۱. فرض کنیم G=(V, E) یک گراف بدون جهت بوده و a, b∈V و a≠b. هر گاه یک راه از a به b موجود باشد، آنگاه یک مسیر از a به b وجود خواهد داشت.



با حذف دورها در رأسهای تکراری

تعریف ۱۱-۴. فرض کنیم G=(V, E) یک گراف بدون جهت باشد. G را **همبند** گوییم اگر بین هر دو رأس متمایز G یک مسیر وجود داشته باشد.





گراف ناهمبند با دو مؤلفه

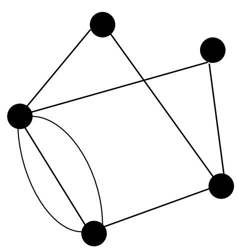
فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۱. تعاریف و مثالها

تعریف ۱۱-۵. در گراف G تعداد مؤلفه های G با k(G) نشان داده می شود.

$1 \le k(G) \le |V|$

تعریف ۱۱-۶. چند گراف (گراف چندگانه)



چندگراف با چندی ۳

فصل ۱۱. نظریه گراف

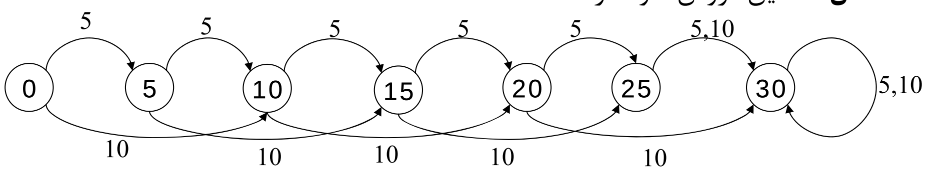
- **گراف وزن دار**

"شامل اطلاعات بیشتری علاوه بر رئوس و یالها می باشد."

مثال: در نقشه جاده های یک کشور که به صورت گراف نشان داده است ممکن است به هر یال عددی بیانگر فاصله بین دو شهر منسوب کنیم. یا به هر رأس عددی که بیانگر جمعیت آن شهر می باشد منسوب کنیم.

مثال: ممکن است درگرافی که بیانگر نتایج یک دوره مسابقات تنیس است تاریخ و یا امتیاز مسابقه را به هر یال نسبت دهیم.

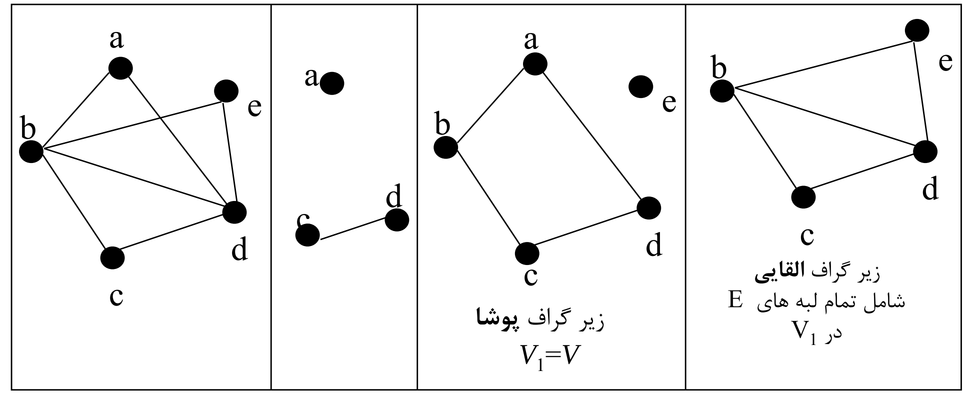
مثال: ماشین فروش خودکار



فصل ۱۱. نظریه گراف

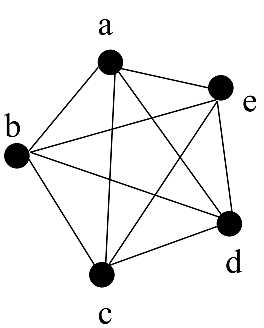
۱۱-۲. زیرگرافها، متمم ها و یکریختی گرافها

تعریف ۱۱-۷. هرگاه $G=(V, E)$ یک گراف باشد، آنگاه گراف $G_1=(V_1, E_1)$ یک **زیرگراف** G نام دارد اگر $V \supseteq V_1 \neq \emptyset$ و $E \supseteq E_1$ که در آن هر لبه در E_1 تنها با رئوس در V_1 تلاقی داشته باشد.



فصل ۱۱. نظریه گراف

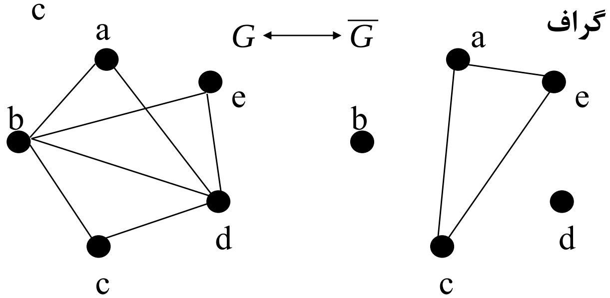
۱۱-۲. زیرگرافها، متمم ها و یکریختی گرافها



K_5

تعریف ۱۱-۱۱. **گراف کامل** : یک گراف بدون جهت و بدون حلقه که در آن بین هر دو رأس متمایز یک لبه وجود دارد. (k_n)

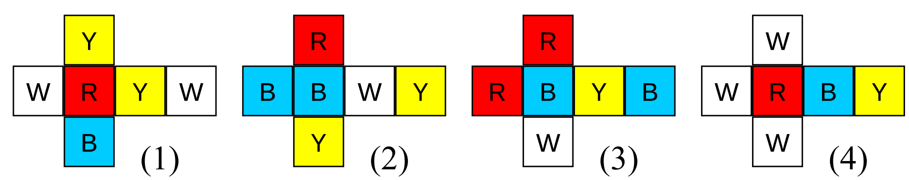
تعریف ۱۱-۱۲. **متمم گراف**



فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۲. زیرگرافها، متمم ها و یکریختی گرافها

مثال ۱۱-۷. **جنون آنی:** چهار معکب داریم که هر یک از شش وجه آنها با یکی از رنگهای قرمز (R)، سفید(W)، آبی(B)یا زرد(Y)، رنگ شده است.هدف بازی قرار دادن مکعبها در یک ستون چهارتایی است به طوریکه هر چهار رنگ در هر یک از چهار طرف ستون قرار گیرد.

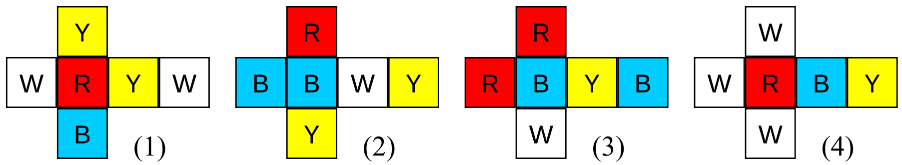


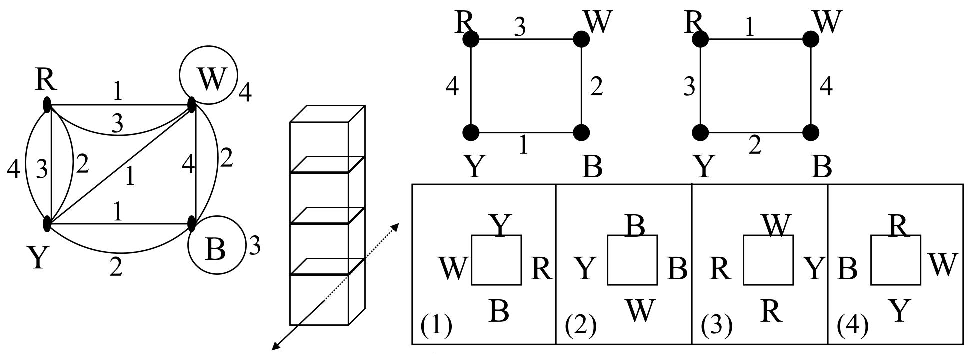
تعداد امکانهای مختلف= $(3)(24)(24)(24)=41,472$

معکب پایینی

۶ وجه با چهار دوران

فصل ۱۱. نظریه گراف

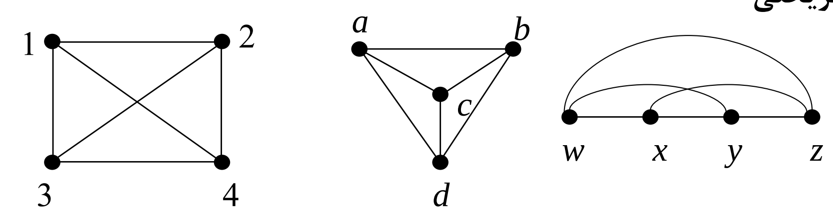




فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۲. زیرگرافها، متمم ها و یکریختی گرافها

یکریختی

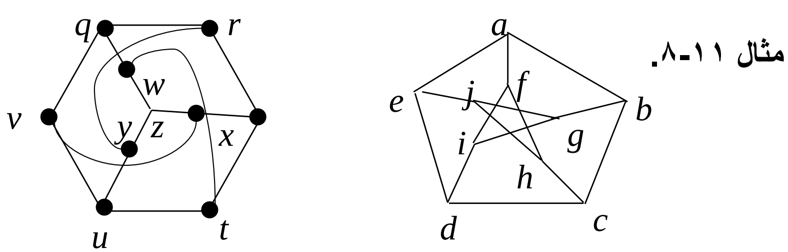


تعریف ۱۱-۳. فرض کنیم G_1 و G_2 دوگراف بدون جهت باشند. تابع $f:V_1 \to V_2$ را یک **یک ریختی گرافها** گوییم اگر (آ) f یک به یک و پوشا باشد. (ب) بازاء هر $a,b \in V_1$ ، $\{a, b\} \in E_1$ اگر و فقط اگر $\{f(a), f(b)\} \in E_2$. در صورت وجود f، دوگراف G_1 و G_2 را **یکریخت** گویند.

نکته: یکریختی مجاورت ها را حفظ می کند.

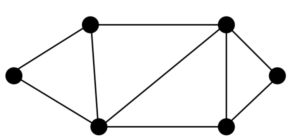
فصل ۱۱. نظریه گراف

مثال ۱۱-۸.

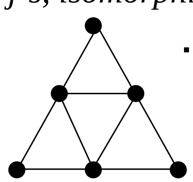


a-q c-u e-r g-x i-z b-v d-y f-w h-t j-s, isomorphic

مثال ۱۱-۹.



degree 2 vertices = 2



degree 2 vertices=3

آیا می توانید الگوریتمی برای تشخیص یک ریختی بیان کنید؟

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۳. درجه رأسی :راه ها و مدارهای اویلری

رأس با درجه یک: رأس آویزان

قضیه ۱۱-۲. هرگاه $G=(V, E)$ یک گراف ساده یا یک چندگراف بدون جهت باشد،آنگاه

$$\sum_{v_i \in V} \deg(v_i) = 2|E|$$

نتیجه ۱۱-۱. در یک گراف ساده یا چند گراف بدون جهت، تعداد رئوس از درجه فرد باید زوج باشد.

مثال ۱۱-۱۱. گراف منظم. یک گراف بی جهت (یا چند گراف) که در آن درجه تمام رئوس یکسان باشد.

آیا ممکن است یک گراف منظم ۴ با ۱۰ لبه داشته باشیم؟

$4|V|=2|E|=20 \Rightarrow |V|=5$

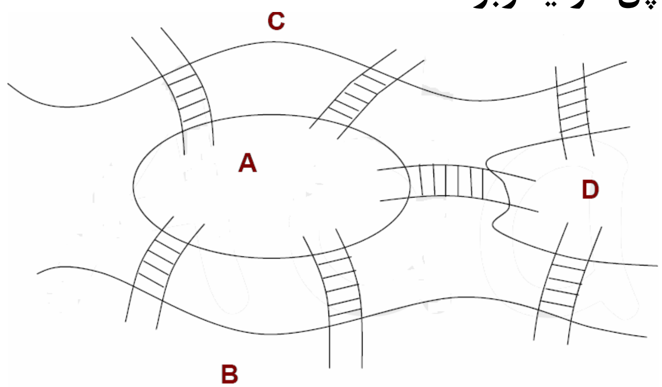
با ۱۵ لبه چطور؟

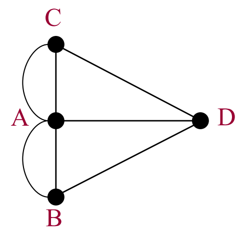
$4|V|=2|E|=30 \rightarrow$ غیر ممکن

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۳. درجه رأسی :راه ها و مدارهای اویلری

مثال ۱۱-۲. **هفت پل کونیگزبرگ**





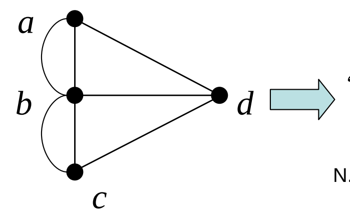
می خواهیم راهی پیدا کنیم که شهر را دور زده و از هر پل درست یک بار عبور کنیم و سپس به نقطه شروع بازگردیم.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۳. درجه رأسی :راه ها و مدارهای اویلری

تعریف ۱۱-۱۵. فرض کنیم G=(V,E) یک گراف یا چند گراف بدون جهت و بدون رأس منفرد باشد.گوییم G دارای **مدار اویلری** است اگر مداری در G باشد که از هر لبه گراف درست یک بار عبور کند. اگر یک راه باز از a به b در G موجود باشد که از هر لبه مدار درست یک بار گذر کند، آنرا یک **راه اویلری** گوییم.

قضیه ۱۱-۳. اگر G یک گراف یا چند گراف بدون جهت و بدون رأس منفرد باشد، آنگاه G دارای مدار اویلری است اگر و فقط اگر G همبند بوده و درجه هر رأس در G زوج باشد.



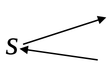
درجه تمام رئوس فرد است. بنابراین برای مسأله هفت پل کونیگزبرگ مدار اویلری وجود ندارد.

فصل ۱۱. نظریه گراف

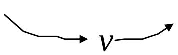
۱۱-۳. درجه رأسی :راه ها و مدارهای اویلری

مدار اویلری ← همبند و درجه زوج

بدیهی



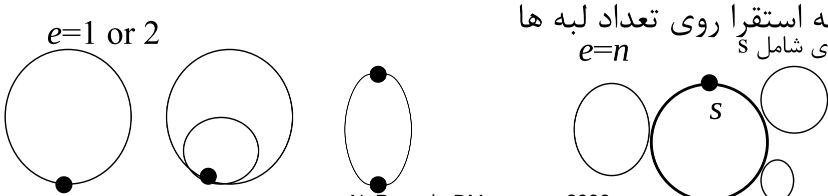
برای رأس شروع s



برای رئوس دیگر

همبند و درجه رئوس زوج ← مدار اویلری

بوسیله استقرا روی تعداد لبه ها



فصل ۱۱. نظریه گراف

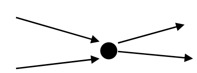
۱۱-۳. درجه رأسی :راه ها و مدارهای اویلری

آیا می توانید الگوریتمی برای ساختن مدار اویلری بیان کنید؟

نتیجه ۱۱-۲. هرگاه G یک گراف یا چندگراف بدون جهت و بدون رأس منفرد باشد، آنگاه G دارای راه اویلری است اگر و فقط اگر G همبند بوده و درست دو رأس از درجه فرد داشته باشد.

a ـــــ یک لبه اضافه می کنیم ـــــ b a و b : درجه فرد

قضیه ۱۱-۴. هرگاه G یک گراف یا چندگراف جهت دار و بدون رأس منفرد باشد، آنگاه G دارای مدار اویلری جهت دار است اگر و فقط اگر G همبند بوده و برای هر v ∈ V ، in-degree(v)=out-degree(v)



one in, one out

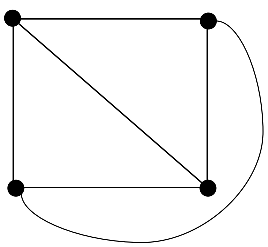
فصل ۱۱. نظریه گراف

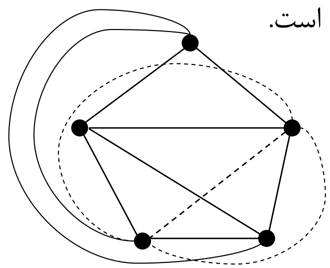
۱۱-۴. گرافهای مسطح

تعریف ۱۱-۱۷. گراف(یا چند گراف) G را **مسطح** نامیم اگر G را بتوان در یک صفحه طوری رسم نمود که لبه های آن فقط در رئوس G متقاطع باشند. یک چنین ترسیمی از G، **تعبیه** G در صفحه نام دارد.

مثال ۱۱-۱۵و ۱۱-۱۶. گرافهای K_1 ، K_2 ، K_3 و K_4 مسطح می باشند ، K_n بازاء $K>4$ نامسطح است.

K_4



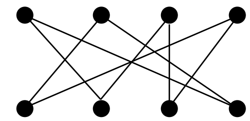


K_5

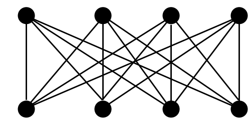
فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

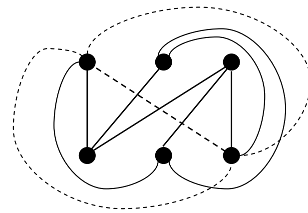
تعریف ۱۱-۱۸. گراف دوبخشی و گراف دوبخشی کامل($K_{m,n}$)



$K_{3,3}$ مسطح نیست.



$K_{4,4}$

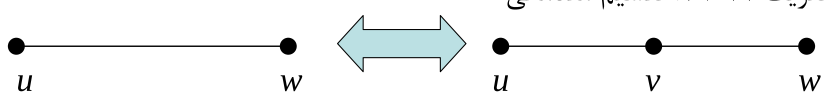


بنابراین هر گراف شامل K_5 و یا $K_{3,3}$ مسطح نمی باشد

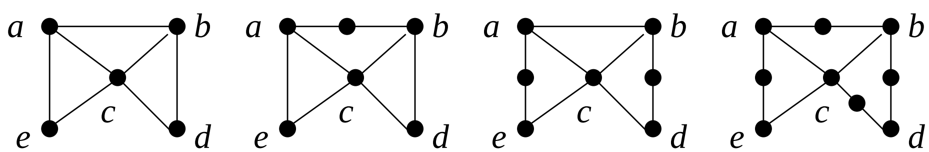
فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

تعریف ۱۱-۱۹. تقسیم مقدماتی



گرافهای G_1 و G_2 را همریخت نامیم اگر یکریخت بوده یا بتوان هر دو را از گراف بدون جهت و بدون حلقه H با دنباله ای از تقسیمات مقدماتی بدست آورد.



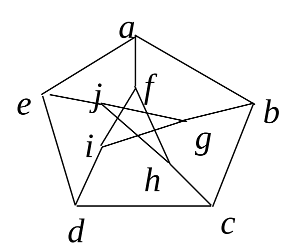
دوگراف همریخت همزمان مسطح و یا نامسطح می باشند.

فصل ۱۱. نظریه گراف

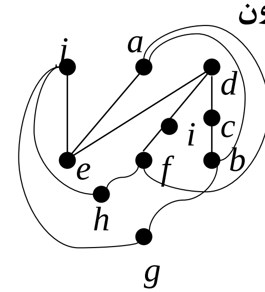
۱۱-۴. گرافهای مسطح

قضیه ۱۱-۵. (قضیه کوارتسکی) یک گراف نامسطح است اگر و فقط شامل زیرگرافی همریخت با K_5 یا $K_{3,3}$ باشد.

مثال ۱۱-۱۹. **گراف پترسون**



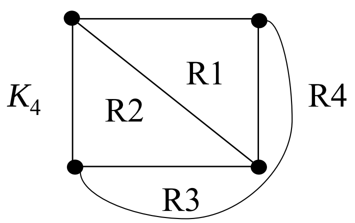
گراف پترسون مسطح نمی باشد.



یک زیر گراف همریخت با $k_{3,3}$

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح



یک گراف مسطح صفحه را به نواحی متعددی تقسیم می کند که یکی از این نواحی بینهایت می باشد.

$$v=4,\ e=6,\ r=4,\ v-e+r=2$$

قضیه ۱۱-۶. در یک گراف (یا چند گراف) مسطح همبند:

$$v\text{-}e\text{+}r\text{=}2$$

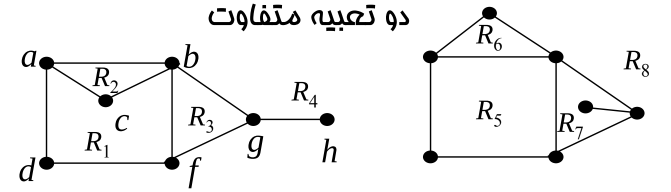
تعداد رأسها — تعداد لبه ها — تعداد ناحیه ها

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

درجه یک ناحیه(deg(R)) : تعداد لبه هایی که در یک (کوتاهترین) گردش بسته حول (اضلاع در) مرز R پیموده می شود.

دو تعبیه متفاوت



$\deg(R_1)=5,\ \deg(R_2)=3$
$\deg(R_3)=3,\ \deg(R_4)=7$

$\deg(R_5)=4,\ \deg(R_6)=3$
$\deg(R_7)=5,\ \deg(R_8)=6$

abghgfda

$$\sum_{i=1}^{4}\deg(R_i)=18=\sum_{i=5}^{8}\deg(R_i)=2\times 9=2|E|$$

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

نتیجه ۱۱-۳. فرض کنیم G یک گراف مسطح همبند و بدون حلقه با $|V|=v$ و $|E|=e>2$ و r ناحیه باشد. در این صورت $e\le 3v-6$ و $3r\le 2e$.

اثبات: چون G بدون حلقه بوده و چند گراف نیست، مرز هر ناحیه حداقل دارای ۳ لبه می باشد؛ لذا هر ناحیه از درجه بزرگتر یا مساوی ۳ می باشد. و چون مجموع درجات r ناحیه 2e می باشد بنابراین $3r\le 2e$.
از قضیه اویلر (قضیه ۱۱-۶) داریم :

$$2=v-e+r\le v-e+(2/3)e=v-(1/3)e\Rightarrow 6\le 3v-e\Rightarrow e\le 3v-6$$

این تنها یک شرط لازم است نه کافی!

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

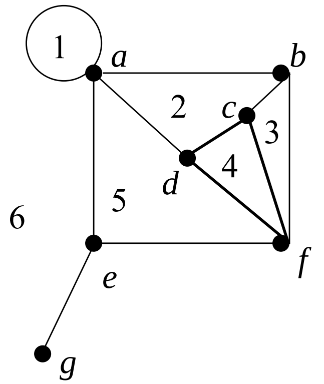
مثال ۱۱-۲۰. برای k_5 داریم $v=5$, $e=10$ و بنابراین $3v-6=9<10$ پس K_5 مسطح نیست.

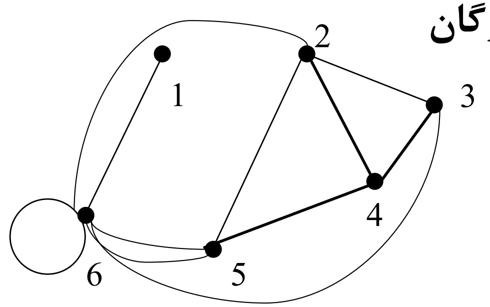
مثال ۱۱-۲۱. برای $k_{3,3}$ ، هر ناحیه حداقل دارای ۴ لبه می باشد، و لذا $4r\le 2e$. اگر $k_{3,3}$ مسطح باشد، $r=e-v+2=9-6+2=5$. بنابراین $20=4r\le 2e=18$ ، و این یک تناقض است و بنابراین $k_{3,3}$ مسطح نیست.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

دوگان





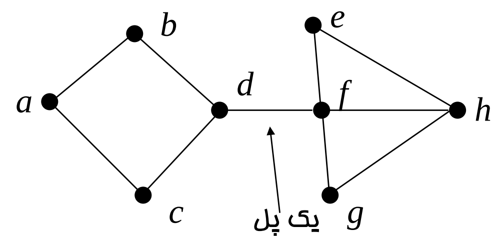
یک لبه در G متناظر با یک لبه در G^d می باشد و بالعکس.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

تعریف ۱۱-۲۰. **مجموعه برشی**: زیرمجموعه ای از لبه ها که حذف آنها باعث افزایش تعداد مولفه های گراف (k(G)) شود.

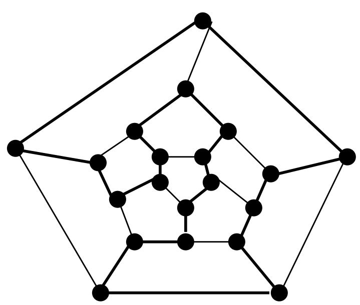
مثال ۱۱-۲۳.



cut-sets: {(a,b),(a,c)}, {(b,d),(c,d)},{(d,f)},...

در گرافهای مسطح، دورها در یک گراف متناظر با مجموعه های برشی در گراف دوگان آن می باشد و بالعکس.

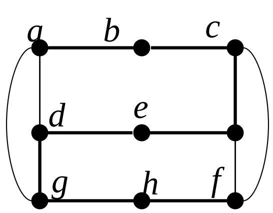
فصل ۱۱. نظریه گراف



۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

یک مسیر یا دور که شامل تمام رأسها باشد

برخلاف مدار اویلری، **شرط لازم و کافی** شناخته شده ای برای اینکه یک گراف همیلتونی باشد وجود ندارد.

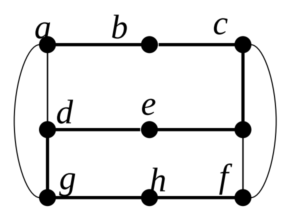


مثال ۱۱-۲۷. مسیر همیلتونی وجود دارد اما دور همیلتونی وجود ندارد.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

چند نکته برای بدست آوردن یک دور همیلتونی در یک گراف دلخواه G=(V, E):



۱. اگر G دور همیلتونی دارد، در این صورت برای هر رأس $v \in V$، $deg(v) \geq 2$.

۲. اگر برای $a \in V$ ، $deg(a) = 2$، در این صورت هر دو یال متلاقی با رأس a حتما باید در دور همیلتونی قرار بگیرند.

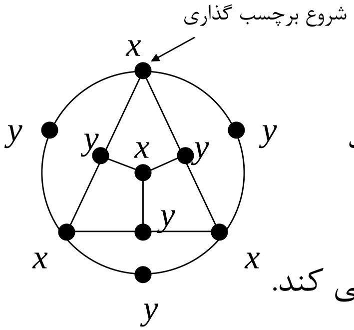
۳. اگر برای $a \in V$ ، $deg(a) > 2$، در این صورت در زمان تشکیل دور همیلتونی به محض عبور از a می توانیم سایر یالهای استفاده نشده a را حذف کنیم.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

مثال ۱۱-۲۸.

۴ تا x و ۶ تا y، چون در مسیر(دور) همیلتونیx و y ها باید یک در میان باشند بنابراین این گراف همیلتونی نمی باشد.



این روش تنها برای گرافهای دوبخشی کار می کند.

مسأله یافتن مسیر همیلتونی هنوز هم حتی برای گراف دوبخشی NP-Complete می باشد

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

قضیه ۱۱-۷. فرض کنیم k^*_n یک گراف جهت دار کامل باشد. یعنی بازاء هر دور رأس متمایز x و y ، درست یکی از لبه های (x, y) یا (y, x) در K^*_n باشد. چنین گرافی (به نام گراف تورنمنت) همواره شامل یک مسیر هامیلتونی (جهت دار) می باشد.

اثبات:فرض کنیم $m\geq 2$ و p_m مسیری شامل m-1 لبه به شکل زیر باشد:

$(v_1, v_2), (v_2, v_3),\ldots(v_{m-1}, v_m)$

اگر $m=n$ کار تمام است. در غیر این صورت فرض می کنیم v رأسی باشد که در p_m ظاهر نشده باشد:

حالت ۱. $v_m \rightarrow v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v$،

حالت ۲. $v_m \rightarrow \ldots \rightarrow v_{k+1} \rightarrow v \rightarrow v_k \ldots \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$،

حالت ۳. $v \rightarrow v_m \rightarrow \ldots \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

قضیه ۱۱-۸. فرض کنیم G یک گراف بدون حلقه با $|v|=n\geq 2$ باشد. هرگاه بازاء هر $x,y \in V$ که $x\neq y$ داشته باشیم $deg(x)+deg(y)\geq n-1$، آنگاه G دارای مسیر همیلتونی است.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

نتیجه ۱۱-۴. فرض کنیم G یک گراف بدون حلقه با $n\geq 2$ رأس باشد. هرگاه بازاء هر $v \in V$، $deg(v) \geq (n-1)/2$، آنگاه G دارای یک مسیر همیلتونی است.

قضیه ۱۱-۹. فرض کنیم G یک گراف بدون جهت و بدون حلقه با $|V|=n\geq 3$ رأس باشد. هرگاه بازاء هر $x, y \in V$ غیر مجاور $deg(x)+deg(y)\geq n$، آنگاه G شامل یک دور همیلتونی می باشد.

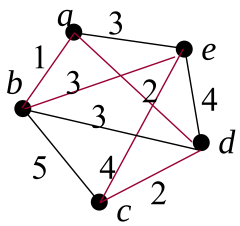
نتیجه ۱۱-۵. هر گاه G یک گراف بدون جهت و بدون حلقه با $|V|=n\geq 3$ باشد و بازاء هر $v \in V$، $deg(v) \geq (n/2)$ ، آنگاه G دارای یک دور همیلتونی است.

نتیجه ۱۱-۶. هر گاه G یک گراف بدون جهت و بدون حلقه با $|V|=n\geq 3$ باشد و نیز $|E| \geq \binom{n-1}{2} + 2$ ، آنگاه G دارای یک دور همیلتونی می باشد.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

یک مسأله مرتبط:فروشنده دوره گرد(TSP)



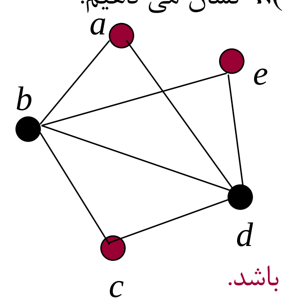
هدف:یافتن دور همیلتونی با کمترین هزینه کل

مثلا a-b-e-c-d-a با هزینه کل 12=2+2+4+3+1

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

تعریف ۱۱-۲۲. اگر $G=(V, E)$ یک گراف بدون جهت باشد، **رنگ آمیزی سره** G وقتی رخ می دهد که اگر $\{a,b\}$ یک لبه در G باشد، a و b رنگهای متفاوتی داشته باشند. (رئوس مجاور رنگهای متفاوتی دارند.) کمترین تعداد رنگهای لازم برای رنگ آمیزی مناسب G را **عدد رنگی** G نامیده و به صورت ℵ(G) نشان می دهیم.



3 colors are needed.

$\chi(K_n)=n$

$\chi(\text{bipartite graph})=2$

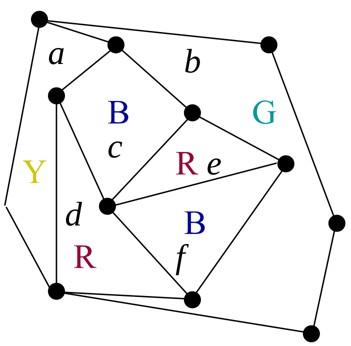
این مسأله در حالت کلی NP-Complete می باشد.

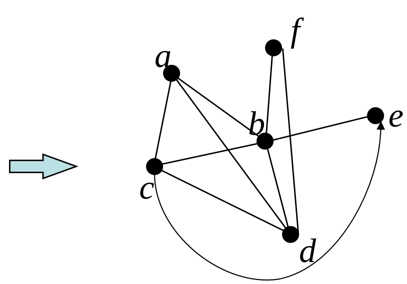
فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

یک مسأله مرتبط: رنگ آمیزی نقشه به طوریکه نواحی با مرز مشترک رنگ متفاوت داشته باشند.

برای هر نقشه چهاررنگ کافی است





فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

چند جمله ای رنگی $P(\lambda,G)$ = تعداد روشهای رنگ کردن G بوسیله λ رنگ.

مثال ۱۱-۳۴. (آ) هرگاه G برابر n رأس منفرد باشد $P(G, \lambda)= \lambda^n$

(ب) $G=K_n$، آنگاه برای G حداقل n رنگ لازم است:

$P(G, \lambda)= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)= \lambda^{(n)}$

(پ) بازاء یک مسیر با n رأس

$P(G, \lambda)= \lambda(\lambda-1)^{n-1}$

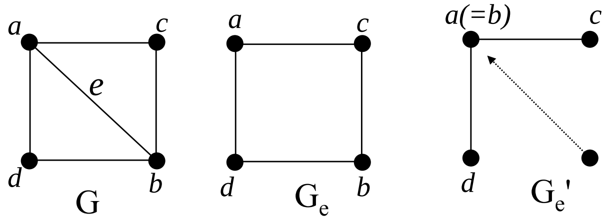
(ت) هرگاه G دارای مولفه های $G_1, G_2,\ldots G_K$ باشد، طبق قانون ضرب:

$P(G, \lambda)=P(G_1, \lambda)\, P(G_2, \lambda)\ldots P(G_k, \lambda)$

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

مثال ۱۱-۳۵.



یکی شدن رئوس

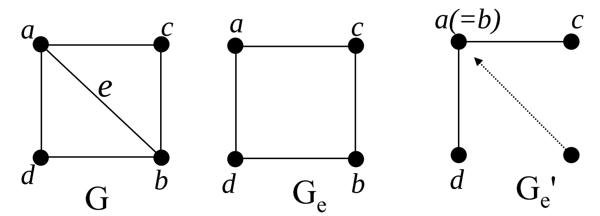
فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

قضیه ۱۱-۱۰. قضیه تجزیه برای چند جمله ایهای رنگی:

هرگاه $G=(V, E)$ یک گراف همبند بوده و $e \in E$ ، آنگاه

$$\mathbf{P(G_e, \lambda) = P(G, \lambda) + P(G'_e, \lambda)}$$



یکی شدن رئوس

در رنگ آمیزی مناسب G_e:

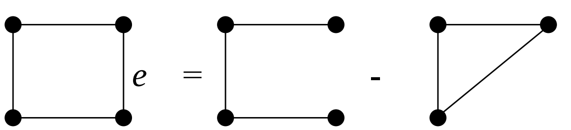
حالت ۱. a و b هم رنگ باشند : رنگ آمیزی مناسب G'_e

حالت ۲. a و b هم رنگ نباشند: رنگ آمیزی مناسب G

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

مثال ۱۱-۳۶.



$P(G,\lambda)$ $\quad$ $P(G_e,\lambda)$ $\quad$ $P(G'_e,\lambda)$

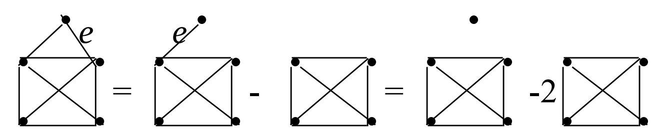
$$P(G,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^3-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda$$

Since $P(G,1)=0$ while $P(G,2)=2>0$, we know that $\chi(G)=2$.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

مثال ۱۱-۳۷.



$$P(G,\lambda)=\lambda\lambda^{(4)}-2\lambda^{(4)}= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3) \qquad \chi(G)=4$$

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱–۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

قضیه ۱۱,۱۱. به ازائ هر گراف G جمله ثابت در $P(G, \lambda)$ برابر صفر است.
برهان. اگر$P(G, 0)=\alpha$ و $\alpha\neq 0$ یعنی گراف را می توان با صفر رنگ به α طریق رنگ آمیزی نمود.

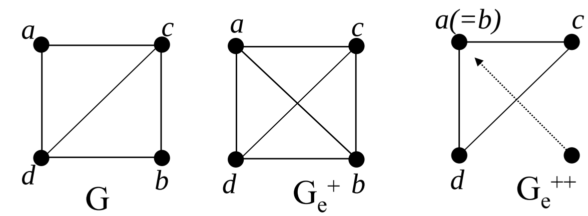
قضیه ۱۱,۱۲– فرض کنیم $G=(V, E)$ و $|E|>0$. در این صورت مجموع ضرایب در $P(G, \lambda)$ مساوی صفر است.
برهان. چون گراف حداقل شامل یک لبه است بنابراین عدد رنگی آن حداقل برابر دو می باشد یعنی گراف را نمی توان با یک رنگ رنگ آمیزی نمود. یعنی:

$$P(G, 1) = 0$$

فصل ۱۱. نظریه گراف

قضیه ۱۱,۱۳–

یکی شدن رئوس



$$\mathbf{P(G, \lambda) = P(G_e^+, \lambda) + P(G_e^{++}, \lambda)}$$

$$P(G, \lambda) = \lambda^{(4)} + \lambda^{(3)} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$